5 Antworten zu den Aufgaben

5.1 Antworten zu Aufgaben aus Kapitel 1

Warm-up 3: Bei jedem Teilen eines Haufens nimmt die Anzahl der Haufen um eins zu, unabhängig davon wie groß die Haufen sind. Jedes Mal, nachdem Spieler A am Zug war, ist daher die Anzahl der Haufen eine gerade Zahl und jedes Mal, nachdem Spieler B am Zug war, ist diese Anzahl ungerade. Das Spiel endet, wenn 99 Haufen auf dem Tisch liegen, da dann jeder Haufen aus nur noch einer Münze besteht und nicht mehr geteilt werden kann. Da 99 eine ungerade Zahl ist, ist dies der Fall, nachdem Spieler B am Zug war. Daher verliert Spieler A auf jeden Fall und zwar unabhängig davon, wie geschickt oder ungeschickt sich die beiden Spieler anstellen!

Permutationen: Die sechs Permutationen der Menge $\{1,2,3\}$ sind $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ und $(3,2,1)$.

„Drei aus Neun“ und„Acht über Vier“: $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$, $\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70$

Ausschuss: Es gibt $\binom{15}{2} = 105$ Möglichkeiten, die zwei Männer zu wählen und $\binom{12}{2} = 66$ Möglichkeiten, die zwei Frauen zu bestimmen. Insgesamt gibt es daher $105\cdot 66 = 6\,930$ Möglichkeiten, den Vorstand zu bilden.

Kugeln ziehen mit Zurücklegen: Die 15 Möglichkeiten sind in alphabetischer Reihenfolge BBBB, BBBG, BBBR, BBGG, BBGR, BBRR, BGGG, BGGR, BGRR, BRRR, GGGG, GGGR, GGRR, GRRR und RRRR.

Zuordnung:
- $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 3 \Rightarrow b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4, b_4 = 5, b_5 = 6, b_6 = 7, b_7 = 9$
- $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 5, b_5 = 7, b_6 = 8, b_7 = 9 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 3, a_7 = 3$

Typ des Urnenmodell bestimmen:
Einlaufwette Pferderennen: ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
Sechsstellige Zahlen mit Ziffern 1,2 und 3: mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
Kader Handball-Mannschaft: ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
Kniffel/Yahtzee: mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Kopfrechnen: $99^4 = (100-1)^4 = 100^4 - 4\cdot 100^3 + 6\cdot 100^2 - 4\cdot 100 + 1 = 96\,000\,000 + 59\,600 + 1 = 96\,059\,601$

Beispiele zum Summenzeichen
$\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 135$, $\sum_{j=0}^{N}(2j+1) = 1+3+5+\ldots+(2N+1)$, $\sum_{m=2}^{8} 3 = 3+3+3+3+3+3+3 = 21$

Schreiben mit Summenzeichen:
$10+20+30+40+50+60+70+80 = \sum_{k=1}^{8} 10k$, $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040} = \sum_{n=2}^{7}\frac{1}{n!}$
$-1+4-9+16-25+36-+\ldots+400 = \sum_{j=1}^{20}(-1)^j j^2$

Binomialkoeffizienten:
$\binom{18}{3} = \binom{17}{3} + \binom{17}{2}$, $\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40\cdot 39}{1\cdot 2} = 780$

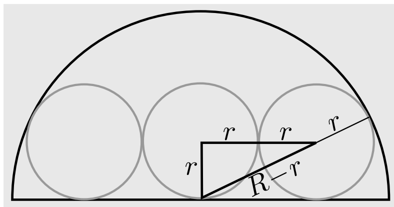
Potenzgesetze:
$12x^{2n+3}y^{3n+2}\,(xy)^3\cdot\left(x^{2n}+y^n\right)=12x^{4n+6}y^{3n+5}+12x^{2n+6}y^{4n+5}$, $\left(a^3b^{2k-1}\right)^3\left(2a^kb^{k+1}\right)^3=8a^{3k+9}b^{9k}$

Brüche vereinfachen:
$$\frac{3(x+1)}{x-2}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{3(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{5x^2+3x+1}{x^2-x-2}$$

Brüche vereinfachen:
$$\begin{aligned}\frac{3v^{n+2}\cdot 6x^{2n+3}\cdot c^{x-1}}{4x^{2n-1}\cdot c^{x+3}\cdot 3v} &= \frac{3v^{n+1}\cdot x^4}{2c^4}\\ \left(\frac{45a^2x^3}{24b^3y}\right)^2\left(\frac{6y^3a}{9bx^3}\right)^3\left(\frac{25a^3y^3}{36bx}\right)^2 &= \frac{5^6a^{13}y^{13}}{2^73^5b^{11}x^5}=\frac{15\,625\,a^{13}y^{13}}{31\,104\,b^{11}x^5}\\ \left(\frac{b^{5x-3y}}{c^{6k-1}}\right):\left(\frac{b^{3x+2y}}{c^{2k+3}}\right) &= b^{2x-5y}c^{4-4k}\end{aligned}$$

Nenner rational machen:
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}+\sqrt{5}-1}{1^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}+1}{4}\\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}} &= \frac{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}\\ &= \frac{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{n^2+1-(n^2-1)}=\frac{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}{2}\end{aligned}$$

Vier Kreise:
In dem eingezeichneten Dreieck ergibt der Satz des Pythagoras



$$r^2+(2r)^2=(R-r)^2\Rightarrow +4r^2+2rR-R^2=0$$

mit der Lösung

$$r=\frac{-2R\pm\sqrt{4R^2+16R^2}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}R=\frac{\phi}{2}R.$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen:
$(12-4\,i)+(2+17\,i)=14+13\,i$ und $(3\,i-5)+(2+i)-(4+6\,i)=-7-2\,i$

Multiplikation komplexer Zahlen:
$2i(3-i)=2+6\,i$, $(3+5\,i)(2-3\,i)=21+i$, und $(4-3\,i)(3-2\,i)=6-17\,i$

Betrag komplexer Zahlen:
$|-2i|=2$, $|1+i|=\sqrt{2}$, $\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ und $|3-5i|=\sqrt{34}$

Nenner reell machen:
$\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,i$ und $\frac{2+5i}{3-4i}=\frac{(2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{-14+23i}{25}=-\frac{14}{25}+\frac{23}{25}\,i$

Quadratische Gleichung: Die komplexen Lösungen sind $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i$

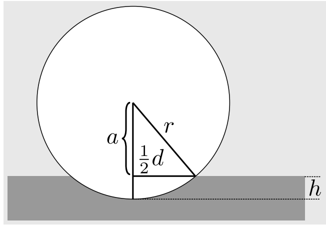
Logarithmen: $\log_2 32=5$, da $2^5=32$, $\log_4\frac{1}{32}=-\frac{5}{2}$, da $\frac{1}{32}=2^{-5}=(4^{1/2})^{-5}$, $\log_3 1=0$ und $\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$, da $\sqrt{27}=(3^3)^{1/2}$

Logarithmengesetze: Lösung $x=-\frac{2}{3}$

5.2 Antworten zu Aufgaben aus Kapitel 2

Abstand zwischen Punkten: $d^2 = (-1-2)^2 + (3-2)^2 = 10 \;\Rightarrow\; d = \sqrt{10}$

Härteprüfung:
Mit dem Kugelradius $r = 5\,\text{mm}$ und dem Eindruckdurchmesser $d = 4\,\text{mm}$ ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras zunächst



$$a^2 = r^2 - \frac{d^2}{4} \Rightarrow a = 4{,}58\,\text{mm}$$

und daraus als Eindrucktiefe $h = r - a = 0{,}42\,\text{mm}$.

Pythagoräische Zahlentripel: beispielsweise ist $5^2 + 12^2 = 13^2$ oder $7^2 + 24^2 = 25^2$ (aber es gibt noch viele weitere solche Zahlentripel)

Dreieck: Cosinusssatz: $c^2 = (3\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 - 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} \cdot \cos(40°) = 11{,}02\,\text{cm}^2 \Rightarrow c = 3{,}32\,\text{cm}$
Sinussatz: $\sin(\alpha) = \frac{3}{3{,}32}\sin(40°) = 0{,}58$, $\sin(\beta) = \frac{5}{3{,}32}\sin(40°) = 0{,}97$
Weil $a^2 + c^2 < b^2$ muss $\beta > 90°$ sein, daher ist $\alpha = 35{,}5°$ und $\beta = 104{,}5°$

Additionstheorem: $\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \sin(30°)\cos(45°) + \cos(30°)\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\cos(105°) = \cos(60° + 45°) = \cos(60°)\cos(45°) - \sin(60°)\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

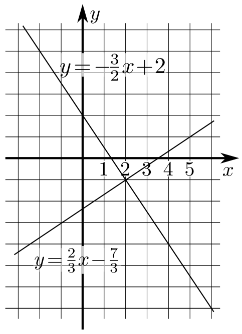
Additionstheorem für Tangens:

$$\tan(\alpha{+}\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)\left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:
$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(45°) + i\sin(45°))\,,\qquad -2 + \sqrt{3}i = 4\,(\cos(120°) + i\sin(120°))$

5.3 Antworten zu Aufgaben aus Kapitel 3

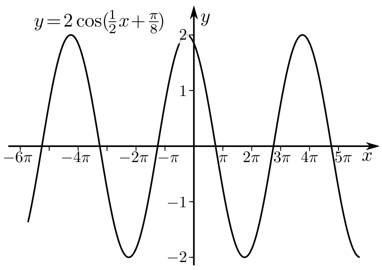
Lineares Gleichungssystem::
Rechnerisch:



$$\begin{array}{rcll} 3x + 2y &=& 4 & \mid \cdot 2 \\ 2x - 3y &=& 7 & \mid \cdot(-3) \\ \\ 6x + 4y &=& 8 & \\ -6x + 9y &=& -21 & \end{array}$$

Addition der Gleichungen liefert $13y = -13 \Leftrightarrow y = -1$
Einsetzen: $3x + 2(-1) = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Dies entspricht dem Schnittpunkt der Geraden in der nebenstehenden Skizze.

Schaubild: $g(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{4})\right) \rightsquigarrow$ Cosinus-Schaubild um Faktor 2 in $x-$ und $y-$Richtung gestreckt, danach um $\frac{\pi}{4}$ nach links verschoben



Lösungen: Da die Cosinusfunktion gerade ist, ist neben $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ auch $-x_0 = -\frac{3\pi}{4}$ eine Lösung. Dies sind alle Lösungen im Intervall $[-\pi, \pi]$. Da die Cosinusfunktion 2π-periodisch ist, sind auch alle Zahlen der Form $x_0 + 2k\pi$ und $-x_0 + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Lösungen.

Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+1/n^2)}{n^2(3-2/n+1/n^2)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k^2+4}{2k^3-2k^2+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+2}-1} = \frac{1}{4}$$

Verkettung: $h(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 5\right) = h_1 \circ h_2$ mit $h_1(z) = \ln(z)$ und $h_2(x) = x^2 - 2x + 5$

$k(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = k_1 \circ k_2$ mit $k_1(z) = \cos(z)$ und $k_2(x) = \frac{1}{x-1}$

Definitionsbereich: $F(x) = \sqrt{\ln(x)\cdot(x^2-1)}$ ist definiert für alle $x > 0$.

Grenzwerte für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2\ln(x) + 7}{5x^3 + 2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 - 2\ln(x)/x^3 + 7/x^3)}{x^3(5+2/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 2\ln(x)/x^3 + 7/x^3}{5+2/x} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-4x}}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{3-4/x}}{x(2+1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3-4/x}}{2+1/x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ableitungen:

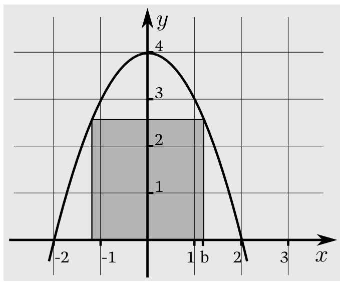
$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sin(x) + x\cos(x) & \Rightarrow \quad f'(x) &= \sin(x) + x\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)\\
g(x) &= \frac{x-2}{x^2+1} & \Rightarrow \quad g'(x) &= \frac{x^2+1-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\\
h(x) &= x^2e^x & \Rightarrow \quad h'(x) &= 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x\\
k(x) &= \frac{e^x\cos(x)}{x} & \Rightarrow \quad k'(x) &= \frac{x(e^x\cos(x) - e^x\sin(x)) - e^x\cos(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Kettenregel:

$h(x) = \sqrt{2x^3 - 3x + 5} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{6x^2-3}{2\sqrt{2x^3-3x+5}}$

$k(x) = \cos(x^4) \Rightarrow k'(x) = -\sin(x^4)\cdot 4x^3$

Rechteck unter Parabel: Hat der rechte untere Punkt des Rechtecks die Koordinaten $(b, 0)$, dann ist die Grundseite des Rechtecks $2b$ und die Höhe $4 - b^2$. Der Flächeninhalt beträgt dann $F(b) = 2b\cdot(4-b^2) = 8b - 2b^3$. Um nach Extrema zu suchen, setzt man $F'(b) = 8 - 4b^2 = 0$ und erhält als einzige positive Lösung $b = \sqrt{2}$. Dass für diesen Wert ein lokales Maximum vorliegt, zeigt man mit Hilfe der zweiten Ableitung oder indem man sich klarmacht, dass $F(0) = F(2) = 0$ ist und $F(b) > 0$ ist für $0 < b < 2$. F muss also zwischen 0 und 2 ein Maximum haben.



Kegel mit maximalem Volumen: Der Umfang des Kreisausschnitts beträgt $u = (2\pi - \alpha)R$. Der Radius r der Kegelgrundfläche erfüllt also die Gleichung

$$2\pi r = (2\pi - \alpha)R \Rightarrow r = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)R.$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Höhe des Kegels dann $r^2 + h^2 = R^2$, das heißt $r^2 = R^2 - h^2$ und das Volumen ist daher

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h$$

Wir betrachten dieses Volumen $V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2h - h^3)$ als Funktion der Höhe h mit der Ableitung

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2).$$

Also ist $V'(h) = 0$ für $h = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. Daraus ergibt sich $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ und als Winkel dann

$$\alpha = \frac{2\pi(R-r)}{R} = 2\pi(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 1.15 \text{ beziehungsweise ungefähr } 66°.$$

Newtonverfahren: Für $f(x) = 2^x + x$ ist $f'(x) = \ln(2)2^x + 1$ und man erhält als Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2^{x_n} + x_n}{\ln(2)2^{x_n} + 1}.$$

Ausgehend von $x_0 = 0$ erhält man damit $x_1 = -0{,}70469194542518$, $x_2 = -0{,}63690609029267$, $x_3 = -0{,}64173330928268$ und $x_4 = -0{,}64111805835934$.

Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+} \sin(x)\cdot\ln(\tan(x)) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)\tan(x)}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} == \lim_{x\to 0+} -\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = 0.$$

Partielle Integration:

$$\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) - \int \sin(x)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + x + C \Rightarrow \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + C_1$$

Insbesondere ist also $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Substitutionsregel:

$$\int_0^1 (2x+3)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \int_3^5 \frac{1}{2}u^{3/2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{5}u^{5/2}\right]_{u=3}^5 = \frac{1}{5}\left(5^{5/2} - 3^{5/2}\right)$$

$$\int t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\sin(w)\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}\cos(w) + C = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + C$$

Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x-13}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x = -2\ln|x-3| + 3\ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

5.4 Antworten zu Aufgaben aus Kapitel 4

Lineare Unabhängigkeit: Die drei Vektoren sind linear unabhängig, weil die Gleichung $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ auf $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ führt.

Lineares Gleichungssystem: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt-Gerade:
Der Richtungsvektor der Gerade g ist $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich $\overrightarrow{PA} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix}$. Mit $|\overrightarrow{PA} \times \vec{c}| = 18\sqrt{2}$ und $|\vec{c}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ erhält man schließlich als Abstand $d = 6$.

Ebene: Die Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ hat beispielsweise die Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieselbe Ebene lässt sich auch durch andere Ebenengleichungen beschreiben, beispielsweise durch $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.

Tangenten an Kreis: Setzt man die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$ und die Gleichung einer Geraden $y = mx + 3$ durch P mit Steigung m ineinander ein, ergibt sich $x^2 + (mx+3)^2 = 4 \Leftrightarrow (1+m^2)x^2 + 6mx + 5 = 0$ mit den von m abhängigen Lösungen $x_{1,2} = \frac{-6m \pm \sqrt{36m^2 - 20(1+m^2)}}{2(1+m^2)} = \frac{-3m \pm \sqrt{4m^2-5}}{1+m^2}$. Eine Tangente liegt vor, wenn die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, wenn also $4m^2 = 5$ bzw. $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ ist.

Kugelgleichung: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$ bedeutet, dass es sich um eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (2, -1, 1)$ und Radius $r = 3$ handelt.